В задачах 1 – 10 найти указанные пределы.

4.

а) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$

Неопределенность $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+0}-\sqrt{1-0}}{3*0}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\frac{1}{3}\frac{\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$\frac{1}{3}\frac{\lim_{x\to 0}2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\frac{\frac{1}{3}*2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{1}{3}$$

Найденный предел $\frac{1}{3}$

б) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+7}{5x^2-2}$

Неопределенность $\infty-\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\infty^2-3\infty+7}{5x\infty^2-2}=\lim_{x\to\infty}(\infty-\infty)0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+7}{5x^2-2}=\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}{5-\frac{2}{x^2}}$$

Сокращаем слагаемые $\frac{1}{x^n}\to 0\,,n>0\,при\,x\to\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}{5-\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to\infty}1-0+0}{0+5}=\frac{\lim_{x\to\infty}1}{5}=\frac{1}{5}$$

Найденный предел $\frac{1}{5}$

в) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{5x^2}$

Неопределенность $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{0}{1}\right)^2}{5¿0^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{0}$$

Применяем формулу $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{5x^2}=\frac{1}{5}\frac{\lim_{x\to 0}\sin^2 x}{x^2\cos^2 x}=\frac{1}{5}\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\cos^2 x}$$

Первый замечательный предел $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$

$$\frac{1}{5}\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\cos^2 x}=\frac{1}{5}\frac{\lim_{x\to 0}1}{\cos^2 x}=\frac{1}{5}\frac{\lim_{x\to 0}1}{\cos^2 0}=\frac{1}{5}\frac{\lim_{x\to 0}1}{1^2}=\frac{1}{5}$$

Найденный предел $\frac{1}{5}$

В задачах 11 – 20 для каждой из заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер

14.

$$y=\frac{1}{2-x}$$

Исследуем данную функцию на непрерывность:

Найдем точки разрыва функции внутри указанной области.

Разрывы $\frac{1}{2-x}$ являются нулями 2-x

x при которых (2-x=0; x=2)

Находим переделы в точке x=2

$$\frac{\lim\limits_{x\to 2-0} 1}{2-x}=\infty$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to 2+0} 1}{2-x}=-\infty$$

В этой точке функция терпит разрыв. Предел равен ∞, поэтому это точка разрыва II-го рода.

Ответ: Точка x1=2 является точкой разрыва II-го рода.

В задачах 21 – 30 найти производные заданных функций.

24.

а) $y=\frac{3\cos x}{2x+1}$

$$y=\left(\frac{3\cos x}{2x+1}\right)=3\frac{(\cos x)*(2x+1)-(2x+1)*\cos x}{(2x+1)^2}=3\frac{-\sin x*(2x+1)-2\cos x}{(2x+1)^2}$$

б)$y=4^{arc\tan 3x}$

$$y=(4\text{¿¿}arc\tan 3x)=4^{arc\tan 3x}*\ln(4)*(arc\tan 3x)=\ln\frac{(4)*4^{arc\tan 3x}*1}{9x^2+1}*(3x)=\frac{3\ln(4)*4^{arc\tan 3x}}{9x^2+1}*x=\frac{3\ln(4}{9}$$

В задачах 31 – 40 исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики

34.

$$y=\frac{x^2}{x-1}$$

1) Область определения функции

$$x-1\neq 0\rightarrow x\neq 1$$

D(y)=(−∞;1) ∪ (1; +∞)

2) Множество значений

E(x)= (0 ; ∞)

3) Проверим является ли функция четной или нечетной

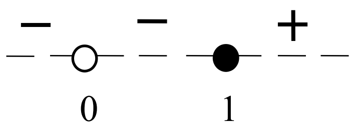
$$y(x)=\frac{x^2}{x-1}\,;\,y(-x)=\frac{x^2}{-x-1}$$

Т.к. $y(x)\neq y(-x)$ **и** $y(-x)\neq -y(x)$**, то функция не является ни четной ни не четной.**

4) Нули функции

$$x^2=0\rightarrow x=0$$

5) Промежутки знакопостоянства



6) Возрастание, убывание

$$y=\left(\frac{x^2}{x-1}\right)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x+1-1}{(x-1)^2}=1-\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$y=0\rightarrow$$

$$\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$$

$$x^2-2x=0$$

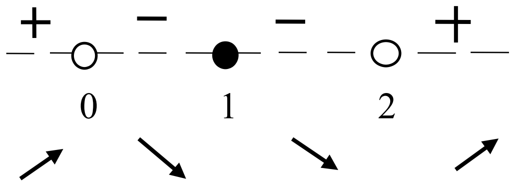
$$\begin{bmatrix} x_1=0 \\ x_2=2 \end{bmatrix}$$

Получили 2 стационарные точки, проверим их на экстремум:

Так как на промежутках (- ∞; 0) U (2; ∞) y`>0, то на этих промежутках функция возрастает.

Так как на промежутках (0; 1] U [1; 2) y`< 0, то на этих промежутках функция убывает.

Промежутки:



Точка x=0 является точкой максимума y (0)=0

Точка x=2 является точкой минимума y (2)=4

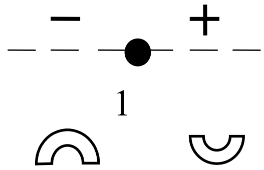
7) Выпуклость, вогнутость и точки перегиба функции

$$y = \left(1-\frac{1}{(x-1)^2}\right) = \left(1-(x-1)^{-2}\right) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0$$

$\frac{2}{(x-1)^3}=0$, уравнение не имеет корней, следовательно, точек перегиба функция не имеет.

Т.к. на промежутке (1; ∞) , y`> 0, то на этом промежутке график функции направлен выпуклостью вниз.

Т.к. на промежутке (- ∞; 1) y`< 0 то на этом промежутке график функции направлен выпуклостью вверх



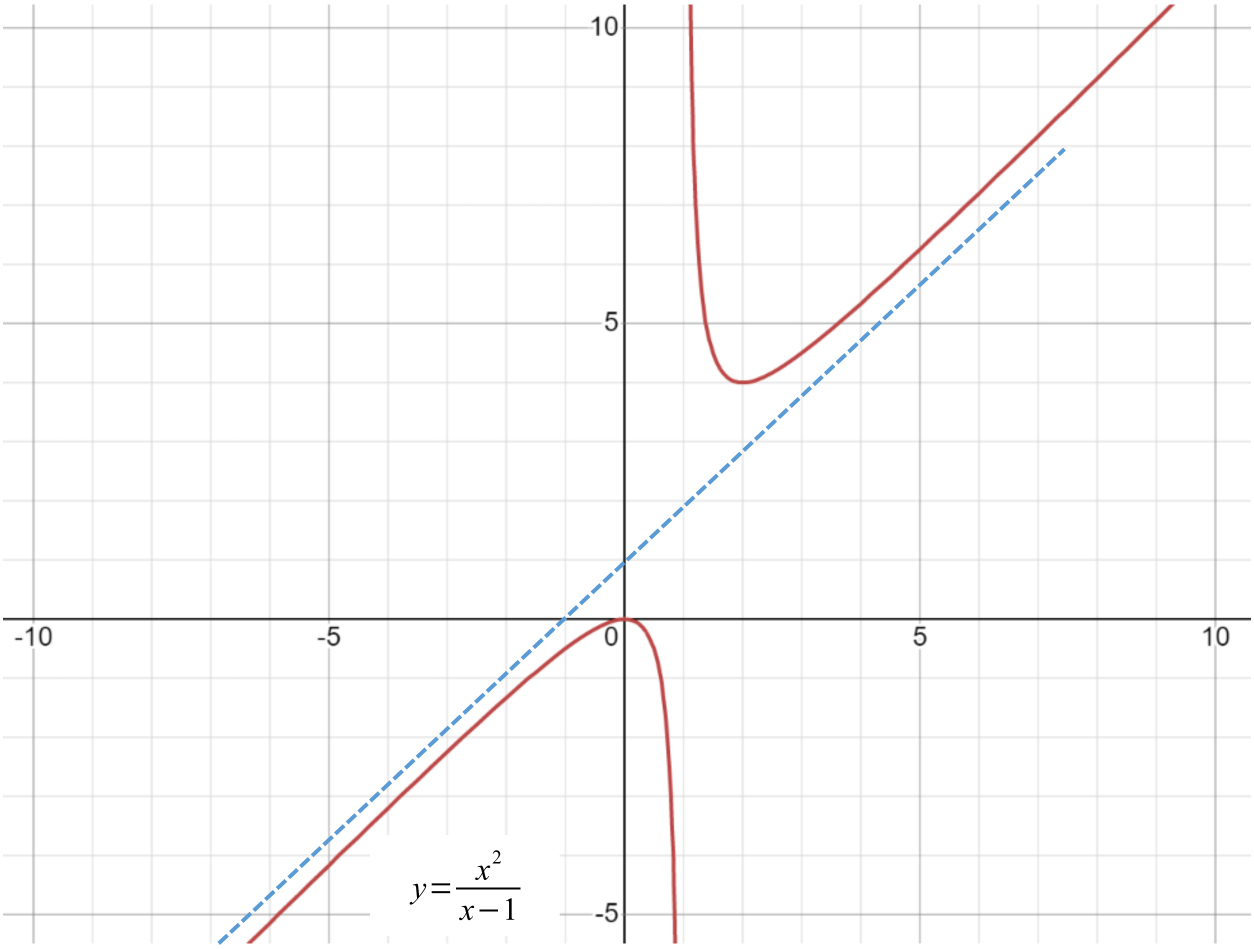
8) Наклонные асимптоты

$y=ax+b$

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} x^2}{x(x-1)} = ¿ \frac{\lim\limits_{x\to\infty} x^2}{x^2 - x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\infty}} = 1 ¿$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} x \right) = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} x^2 - x^2 + x}{x - a} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} x}{x-1} = 1$$

Получаем: y=x+1 – наклонная асимптота



В задачах 41 – 50 найти неопределенные интегралы.

44.

а) $\int \frac{(x-4)(x+6)}{x^2}dx$

$$\int \frac{(x-4)(x+6)}{x^2}dx=\int \frac{x^2+2x-24}{x^2}dx=\int \frac{2}{x}-\frac{24}{x^2}+1\,dx=2\int \frac{1}{x}dx-24\int \frac{1}{x^2}dx+\int 1\,dx=2\ln(|x|)+\frac{x^2+24}{x}+$$

б) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$

Подстановка

$$u=\sqrt{1+2\cos x}$$

$$-du=\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+2\cos x}}$$

$$\int -1\,du$$

Интеграл от константы

$$-1*u=-u$$

Обратная замена

$$u=\sqrt{1+2\cos x}$$

$$-\sqrt{1+2\cos x}$$

В задачах 51 – 60 вычислить определенные интегралы.

54.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$$

Функция непрерывна на интервале

По формуле:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

Где

$$F(x) - первообразная\ для\ f(x)$$

$$f(x) - непрерывна\ на\ интервале\ [a, b]$$

$$F(x)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$F(x) = -\cot x$$

Значения

$$F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

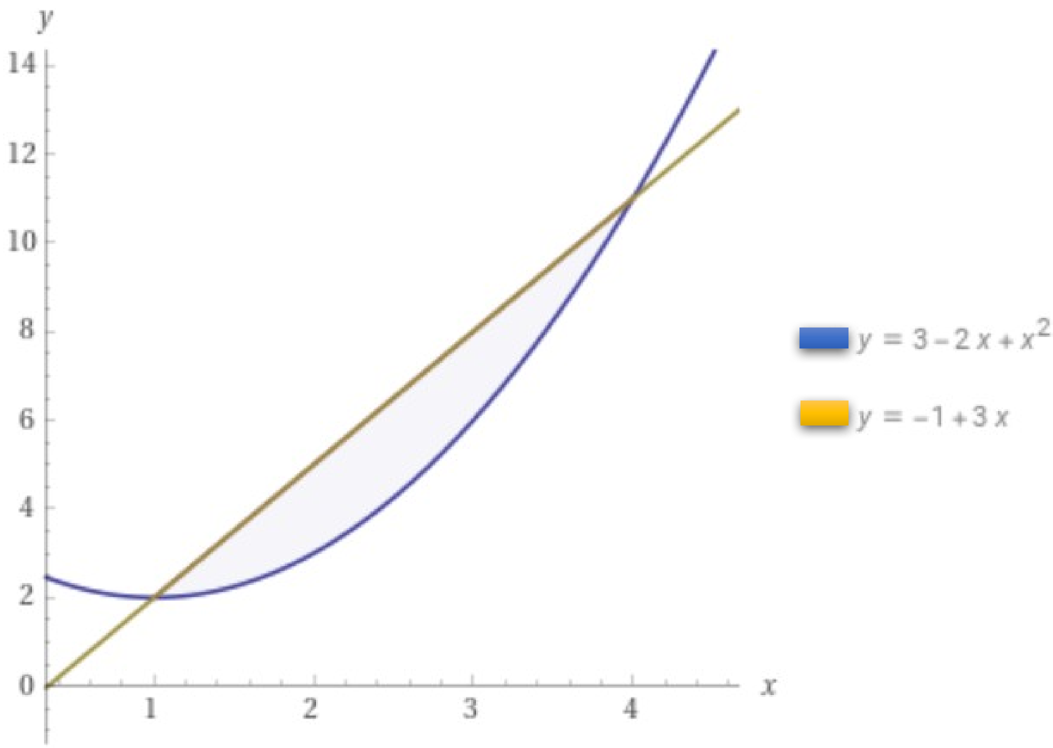
В задачах 61 – 70 найти площади фигуры, ограниченных линиями. Сделать чертеж

64.

$$y = x^2 - 2x + 3,\ y = 3x - 1$$

Площадь:

$$\int_1^4 \left(-4 + 5x - x^2\right) dx = \frac{9}{2} = 4,5$$


y
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
x
$y = 3 - 2x + x^2$
$y = -1 + 3x$